# MŰSZAKI TUDOMÁNY AZ ÉSZAK-ALFÖLDI RÉGIÓBAN 2010

**KONFERENCIA ELŐADÁSAI**

**Nyíregyháza, 2010. május 19.**

**Szerkesztette:**
**Edited by**
*Pokorádi László*

**Kiadja:** **Debreceni Akadémiai Bizottság Műszaki Szakbizottsága**

ISBN 978-963-7064-24-1

**Debrecen 2010**

**A konferencia szervezői:**

***Magyar Tudományos Akadémia Debreceni Területi Bizottság (DAB)***
***Műszaki Szakbizottsága és a***
***Nyíregyházi Főiskola Műszaki és Mezőgazdasági Kar***

***Közreműködő:***
***Magyar Tudományos Akadémia Miskolci Területi Bizottság (MAB)***
***Gépészeti Szakbizottsága***

**A Programbizottság tagjai:**
*Prof. Dr Pokorádi László, elnök*
*Dr. Kalmár Ferenc; Dr. Kovács Imre; Dr. Lámer Géza; Nagy Attila;*
*Prof. Dr. Óvári Gyula; Dr. Sikolya László;*
*Prof. Dr. Szabolcsi Róbert; Dr. Szigeti Ferenc;*
*Dr. Szűcs Edit; Dr. Szűcs Péter;*
*Prof. Dr. habil. Tisza Miklós*

A kiadvány nyomdai megjelentetését a ***DKV Debreceni Közlekedési Zártkörűen Működő Részvénytársaság*** támogatta.

***A Konferencia szervezését a***
***Magyarország-Románia Határon Átnyúló Együttműködési Program***
***HURO/0801/036/01 sz. pályázata támogatja***

# A MATEMATIKAI MODELLEK BIZONYTALANSÁGAI

# UNCERTAINTIES OF MATHEMATICAL MODELS

**POKORÁDI László**

egyetemi tanár
Debreceni Egyetem
pokoradi@mk.unideb.hu

***Kivonat:*** *A matematikai modellezés fő feladata valós fizikai, technikai jelenségek, folyamatok vagy rendszerek leírása és elemzése. A matematikai modellek felállításakor, illetve a kapott eredmények elemzésekor mindig számolnunk kell valamilyen fajtájú, valamint mértékű bizonytalansággal. A cikk a matematikai rendszermodellezés során fellépő bizonytalanságokat és azok elemzési módszereit, valamint az előadó ezen tudományterületen folytatott eredményeit mutatja be.*

***Kulcsszavak:*** *modellezés, modell bizonytalanság, rendszertechnika*

***Abstract*** *The main tasks of mathematical modeling are depicting and analyzing of real physical or technical phenomena, processes and systems. During mathematical modeling of real technical system we can meet any type and rate model uncertainty. The paper will show types of modeling and simulation uncertainties and methods used to investigate them and results of presenter's scientific researches related to field mentioned above.*

***Keywords:*** *modeling, model uncertainty, system engineering*

## 1. BEVEZETÉS

A matematikai modellezés fő feladata valós fizikai jelenségek folyamatok vagy rendszerek modelljeinek felállítása, azaz matematikai leírása. A modelleket és paramétereket a modellezett rendszer természete és a megkívánt pontosságú eredmény függvényében kell kiválasztanunk. A gerjesztések, valamint a belső jellemzők helyes feldolgozása biztosítja, hogy az eredményekben a rendszer valós tulajdonságai tükröződjenek. Ezért kritikus kérdés a megfelelő modell felállítása és a rendelkezésre álló adatok helyes feldolgozása. A mérnöki gyakorlatban a rendelkezésre álló információ gyakran nem kellően megbízható vagy pontos — inkább pontatlan, diffúz, fluktuáló, nem teljes, töredékes, megbízhatatlan, félreérthető, és főleg a nyelvi változók jelentős szubjektivitással bírnak. Ezeket az információkat főleg tervek, tervrajzok, mérések, megfigyelések, tapasztalatok, szakértői ismeretek, és előírások alapján nyerhetjük. Ráadásul, ezeket az adatokat a gyártás, üzemeltetés során bekövetkező emberi tévedések, hibák, illetve a környezet paramétereinek sztochasztikus változásai is befolyásolják. A fenti jelenségeket egy általános kifejezéssel tudjuk összegezni, ez a bizonytalanság [5]. A bizonytalanság elválaszthatatlan egy modelltől, a gerjesztésektől és a modellparaméterektől. A bizonytalanság elemzés információt ad a kapott válaszok hibahatárairól, a modell eredményeinek elfogadási szintjéről.

A rendelkezésre álló információk bizonytalansága megakadályozhatja a helyes modell, valamint pontos adatok, felesleges információk nélküli meghatározását. Ezért, a bizonytalanságot egy alkalmas modellel kell leírnunk, mely összhangban van a fizikai rendszerről rendelkezésre álló információinkkal, és azt valamilyen numerikus módon oldjuk meg. Ebből a szempontból a hiányosságok torzított számítási eredményekhez, rossz döntésekhez vezethetnek.

A modellbizonytalanság elemzési eljárások módszertanát kiterjedt irodalom vizsgálja.

Ezek közül érdemes kiemelnünk FERSON és TUCKER [1], HELTON és DAVIS [2], illetve OBERKAPF et al. [4] munkáit. A Szerző témakörrel kapcsolatos gondolatait, eredményeit [5] könyvében összegzi.

A mai magyar repüléstudományi publikációkban is több tanulmány olvasható, mely a rendszer, és így a modellbizonytalanság hatásait — adott — szakmai szempontból elemzi.

ROHÁCS [6] tanulmányában az európai kisrepülőgép és a személygépkocsik jövőbeli teljes üzemeltetési költségbecslés végezte el. Elemzéséhez bizonytalan faktorokat talált, mivel az egyes költség elemek alakulása nem tisztázott, ezért Monte-Carlo szimulációt alkalmazott.

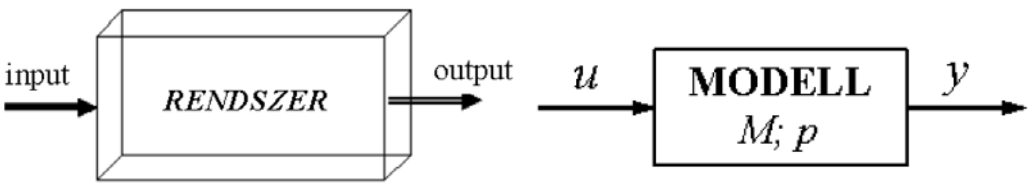
SZABOLCSI [7] cikkében az érzékenységvizsgálat matematikai alapjaival, és szabályozástechnikai alkalmazásaival, és ezen belül egy hipotetikus, kísérleti repülőgép feltételezett matematikai modelljével, és feltételezett irányítási rendszerének érzékenységvizsgálatával foglalkozik. Megállapítja, hogy dinamikus rendszer érzékenységét a rendszerdinamikában bekövetkező változásokra, és a visszacsatoló ágban (érzékelő) bekövetkező változásokra bonthatjuk. Ezen eltérések — azaz paraméterbizonytalanságok — lehetséges okaiként a rendszeröregedését, vagy elhangolódását határozza meg.

A cikk a matematikai rendszermodellezés során fellépő bizonytalanságokat és azok elemzési módszereit, valamint az előadó ezen tudományterületen folytatott eredményeit mutatja be.

A cikk az alábbi fejezetekből áll: A 2. fejezet a modellbizonytalanság forrásait mutatja be. A 3. fejezet ismerteti modellalkotási bizonytalanság elemzési módszereit. A 4. fejezetben összegzi munkáját és jövőbeli kutatási terveit körvonalazza a Szerző.

## 2. A MODELLBIZONYTALANSÁG FORRÁSAI

A modell a valóságos rendszer egyszerűsített, a vizsgálat szempontjából lényegi tulajdonságait kiemelő mása. A modell mindazon másodlagos jellemzőket elhanyagolja, amelyeket a kitűzött vizsgálat szempontjából nem tekintünk meghatározónak (1. ábra).




1. ábra Rendszer és modell (forrás: [5])

A matematikai modell mindig rendelkezik

| | | |
|---|---|---|
| $M$ | — | szerkezettel (például lineáris; diszkrét értékű, sztochasztikus stb.); |
| $p$ | — | belső paraméterekkel (például az arányossági tényezők, vagy konstansok); |
| $u$ | — | bemenő (input) jelekkel |

melyekre $y$ kimenő jellel (függő változókkal) reagál.

A bizonytalanság elemzési módszerek értelmezéséhez először írjunk fel egy

$$\underline{y} = f(\underline{x}) \tag{1}$$

általános modellt, ahol:

$\underline{y}$ — függő változók vektora;

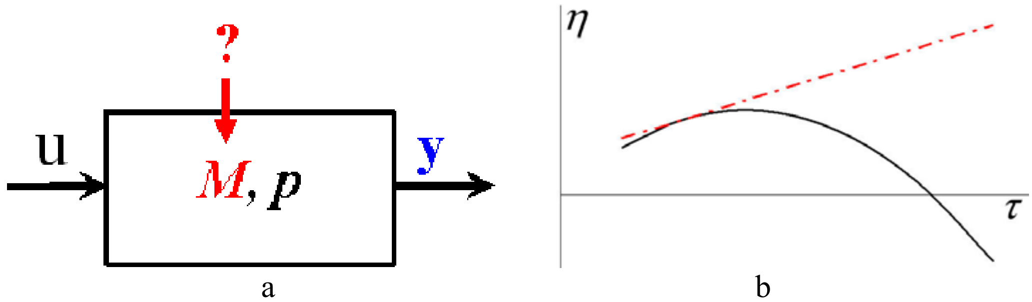
$\underline{x}$ — független változók vektora, mely magába foglalja a $p$ belső paramétereket és az $u$ bemenő (input) jeleket.

A bizonytalanság — annak forrása alapján történő — osztályozása megkülönböztet parametrikus (angol nevén: „aleatory uncertainty”, illetve a modern szabályozástechnikában inkább a „parameter uncertainty”) és ismereti (epistemic uncertainty) bizonytalanságot.

Az ismereti bizonytalanság forrása általában az ismeretek vagy információk hiánya, mely megakadályozhatja a modell helyes felállítását és a természet általános megfigyelési rendszereinek meghatározását, azaz a modell $M$ szerkezetét (2.a ábra).

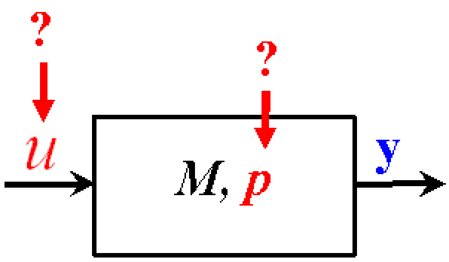
Az ismereti bizonytalanságot — az (1) függvényre utalva — az $f$ függvény helytelen felvételének tekinthetjük — hiányos ismeret vagy rosszul megválasztott egyszerűsítések következtében. Legegyszerűbb példának vehetjük egy nem lineáris folyamat lineáris modellezését, amit a 2.b ábra szemléltet.

Az ismereti bizonytalanság gyakorlati („mérnöki”) főbb forrásai lehetnek: nem megfelelő ismeret a vizsgált rendszerről és környezetéről, a fizikai törvények helytelen alkalmazása, inkorrekt modellegyszerűsítések, linearizáció.




2. ábra Ismereti bizonytalanság

A parametrikus bizonytalanság elsődlegesen az objektivitáshoz kapcsolható, szemben az ismereti bizonytalansággal, mely az objektivitáshoz és szubjektivitáshoz egyaránt köthető, esetileg külön-külön, illetve egyszerre. Azaz a parametrikus bizonytalanság oka vagy a külső, input vagy a modell (rendszer) belső paramétereinek ingadozásai. Következésképpen, a parametrikus bizonytalanság megfelelő módszerekkel modellezhető és feldolgozható.




3. ábra Parametrikus bizonytalanság

Ismét az (1) egyenletre hivatkozva ez a bizonytalansági forma az $\underline{x}$ vektor elemei értékeinek ingadozását, illetve azok következményeit jelenti.

A parametrikus bizonytalanság gyakorlati („mérnöki") főbb forrásait az alábbiakban foglalhatjuk össze: gyártási, üzemeltetési paraméter eltérések; elöregedés; elhangolódás; helytelen kvantálás; pontatlan mérés; mérési zaj; helytelen (statisztikai) adatfeldolgozás; nyelvi változók alkalmazása.

## 3. BIZONYTALANSÁG ELEMZÉSI MÓDSZEREK

A parametrikus bizonytalanság tudományos szintű elemzése alapvetően két eltérő módon oldható meg [1]. A 4. ábra a fent említett lehetséges elemzési módokat, benne a nyilak a módok fejlődését szemlélteti.

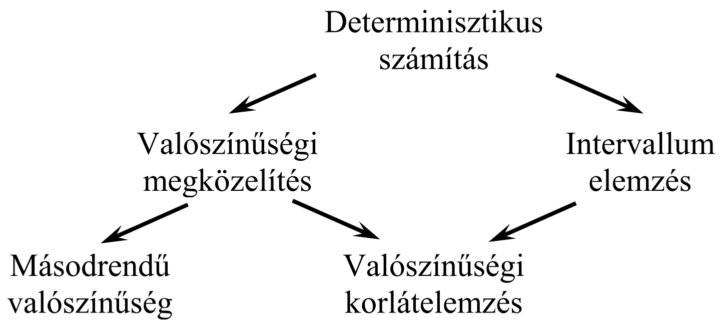
A független változók értékeinek bizonytalanságát, ingadozását jellemezhetjük a

$$\underline{d}_x^{\,T} = \left[d_{x1}; d_{x2} \ldots d_{xn}\right] \tag{2}$$

eloszlásvektorral, melynek elemei a függő változók eloszlás függvényei, illetve a

$$\underline{i}_x^{\,T} = \left[i_{x1}; i_{x2} \ldots i_{xn}\right] \tag{3}$$

intervallumvektorral, melynek elemei a függő változók értékintervallumai.




4. ábra Az eltérő bizonytalanságelemzési módok ([1] alapján)

Az első mód a gerjesztések bizonytalansága következtében fellépő lehetséges rendszerválaszok meghatározása intervallum értékekkel. Ezen eljárási mód annak figyelembevétele, hogy néhány vagy az összes paraméter nem egy adott értékkel rendelkezik, hanem bizonyos intervallumon belül található. Általános megfogalmazásuk esetén az intervallumokhoz nem kapcsolunk valószínűségi eloszlásokat, csak a lényegi eredmények — rendszer kimenő jelei értékeinek — lehetséges jövőbeli értékeit határozzuk meg a

$$\underline{i}_y = f_i(\underline{i}_x) \tag{4}$$

függvény meghatározásával. Ahol az $f_i$ függvény az (1) egyenlet $f$ függvénye alapján határozható meg. Számos esetben előfordul, hogy az adott problémát egy lineáris matematikai modellel tudjuk elemezni, de az együtthatók és a paraméterek valamilyen szintű bizonytalansággal, így egy intervallummal bírnak. Az

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b} \tag{5}$$

alakú lineáris rendszereket, ahol az $\underline{\underline{A}}$ együtthatómátrix, illetve $\underline{b}$ vektor elemei intervallumok, lineáris intervallumrendszereknek nevezzük [3].

A másik alapvető módszer a környezet gerjesztéseinek minden lehetséges eleméhez való valamilyen valószínűségi eloszlás rendelése és ez alapján a rendszer kimenő jellemzői

$$\underline{d}_y = f_d(\underline{d}_x) \tag{6}$$

valószínűségi eloszlásainak meghatározása. Ekkor az $f_d$ függvényt az (1) egyenlet $f$ függvénye alapján határozzuk meg. Ha az adatok valószínűségi eloszlásai ismertek, elméletileg mindegyik alternatíva következményeinek eloszlását is megtudhatjuk. Ez egy egyszerű kritérium esetén a vizsgált rendszer vagy folyamat kvalitatív tulajdonságának valószínűségi eloszlását jelenti.

A valószínűségi módszerek egyike a Monte Carlo szimuláció. A Monte-Carlo szimulációs módszert NEUMANN JÁNOS dolgozta ki 1945-ben. Lényege, hogy az egyes bizonytalan tényezőkhöz rendelt valószínűség-eloszlások alapján véletlenszerűen választunk ki értékeket, amelyeket a szimulációs vizsgálat egy-egy kísérletében felhasználunk. Monte-Carlo módszereknek nevezzük a matematikai feladatok megoldásának véletlen mennyiségek modellezését felhasználó numerikus módszereit és azok jellemzőinek statisztikus értékelését. A Monte-Carlo egy olyan matematikai eszköz, mely alkalmas arra, hogy véletlen események sorozatával oldjunk meg determinisztikus problémákat.

Az „egyszerű" valószínűségi eloszlásfüggvények egyik „hibája", hogy értelmezési tartományuk a két végtelen érték között található. Ez nem teszi lehetővé csak a műszaki gyakorlatban előforduló, reális — adott intervallumon belüli — értékek vizsgálatát. A fenti probléma megoldására alkalmazhatjuk a valószínűségi korlátelemzést, amikor korlátozási megközelítést a alkalmazunk valószínűségi számításokhoz. A fentiek alapján leírva egyszerre határozzuk meg a gerjesztések eloszlásai és intervallumai függvényében a rendszer outputjainak eloszlásait és intervallumait:

$$\begin{bmatrix} \underline{d}_y \\ \underline{i}_y \end{bmatrix} = f_{di}\left(\begin{bmatrix} \underline{d}_x \\ \underline{i}_x \end{bmatrix}\right) \; . \tag{7}$$

A valószínűségi korlátelemzésre legegyszerűbb példának vehetjük az úgynevezett háromparaméteres Weibull eloszlás alkalmazását, amikor az úgynevezett küszöb paraméter korlátozza a valószínűségi változó minimális értékét.

Nem ritka, hogy az úgynevezett szubjektív valószínűségekkel találkozunk, ami a szakértők (vagy bizonyos esetekben a laikusok) által becsült valószínűségi értéket jelent. Ha az adatok száma nem elegendő a statisztikai elemzésekhez, így a valószínűség számítás alkalmazásához, analógiák alapján fel lehet tételezni az eloszlás jellegét, de ennek már szubjektív jellege van. Ilyen modell bizonytalanság elemzés esetén úgynevezett másodrendű bizonytalansági modellekről beszélünk, melyeket általánosan az alábbi formában írhatjuk fel:

$$\underline{d}_y = f_{dd}\left(\underline{d}_{d_x}\right) \; , \tag{8}$$

ahol:

$$\underline{d}_{d_x}{}^T = \left[ d_{d_{x1}}; d_{d_{x2}} \ldots d_{d_{xn}} \right] \tag{9}$$

vektor, melynek elemei a bemenő jelek eloszlás-paramétereinek eloszlásfüggvényei. Ebben az esetben az (1) egyenlet $f$ függvénye alapján kell meghatároznunk az $f_{dd}$ függvényt.

Egy viszonylag új út a kiegészítő információk bizonytalansági modellekbe történő beépítésére a fuzzy halmazelmélet alkalmazása, amikor nem statisztikai adatokkal rendelkezünk az adatokkal kapcsolatos szakértői vélemények kvalitatív leírásai vagy az alternatívák következményeinek értékelésére.

## 4. ÖSSZEFOGLALÁS, JÖVŐKÉP

A matematikai modelltől elválaszthatatlan annak valamilyen formájú és mértékű bizonytalansága. A modell bizonytalanságát — az alkalmazhatóságának értékelése érdekében — elemezni kell.

Az utóbbi években a Debreceni Egyetem Műszaki Karán intenzív kutatómunka folyik annak feltárása céljából, hogy a széles értelemben vett modellezés bizonytalanság kezelés milyen módon oldható meg a leghatékonyabb formában — a karbantartás-menedzsment területén. Ezzel egy időben fontos feladatként fogalmazódott meg ezen eljárások egyszerű szemléltetése BSc, MSc és PhD képzések különböző tantárgyai oktatásakor.

A Szerző munkája során olyan tanulmányok elkészítését tűzte ki célul, amelyek leírják a modellalkotási bizonytalanságokat, értelmezik, vizsgálják és szemléltetik a matematikai modellek bizonytalanságainak elemzési módszereit.

Jelen sorok írója jövőbeni tudományos tevékenységét az alábbiakban fogalmazza meg:

- parametrikus bizonytalanság valószínűségi elemzési módszereinek kidolgozása, ha a bemenő jellemzők nem függetlenek egymástól;
- parametrikus bizonytalanság elemzési módszereinek további vizsgálata;
- a modellek ismereti bizonytalanságának fuzzy halmazelméletre épülő elemzése.

## 5. FELHASZNÁLT IRODALOM


[1] **FERSON S. - TUCKER W. T.,** Sensitivity Analysis Using Probability Bounding, Reliability Engineering & System Safety 91 (2006) 1435–1442

[2] **HELTON, J.C. - DAVIS, F.J.,** Latin Hypercube Sampling and the Propagation of Uncertainty in Analyses of Complex Systems, Reliability Engineering & System Safety 81 (2003) 23-69.

[3] **MUZZIOLI, S. – REYNAERTS, H.,** Fuzzy linear systems of the form $A_1x + b_1 = A_2x + b_2$, Fuzzy Sets and Systems 157 (2006) 939 – 951

[4] **OBERKAMPF, V.A. - HELTONB, J.C. - JOSLYN, C.A. - WOJTKIEWICZ, S.F. - FERSON, S.,** Challenge Problems: Uncertainty in System Response Given Uncertain Parameters Reliability Engineering & System Safety 85 (2004) 11–19.

[5] **POKORÁDI L.,** Rendszerek és folyamatok modellezése, Campus Kiadó, Debrecen, pp.242. (ISBN 978-963-9822-06-1)

[6] **ROHÁCS D.,** Kisrepülőgépek elérhetőségének hosszú távú előrejelzése, Repüléstudományi Közlemények, 2007/2, Különszám, pp. 8

[7] **SZABOLCSI RÓBERT**, Dinamikus rendszerek érzékenységvizsgálata, Villamos gépek, hajtások, villamosenergia-szolgáltatás, villamosipari és épületvillamossági berendezések 2010, (ISSN: 1587-6853). p.5–10.