

INTERVALLUM LOGIKÁK

INTERVAL LOGICS

PORTIK Tamás

Ph.D. hallgató

Debreceni Egyetem, Informatikai Tudományok Doktori Iskola

4028, Debrecen, Ótmető útca 2-4.

portik@eng.unideb.hu

Kivonat: Az ember logikus gondolkodása évezredekre nyúlik vissza, melynek alapja a klasszikus kétértékű logika. Erre épült általában a tudomány majd minden területe és majd minden alkalmazás. Csak az elmúlt évezred utolsó századában sikerült alkalmazni nem klasszikus logikát, konkrétan fuzzy logikát. A szerző célja ezen írással, hogy bemutassa az különféle logikákat. Remélve ezzel azt, hogy esetleg más tudomány területeken is alkalmazásra találnak, nemcsak a számítástechnika területén.

Kulcsszavak: intervallum-logika, intuicionista logika, fuzzy logika, többértékű logika

Abstract: The thinking of the mankind goes back thousand years ago in the past, which has based on classical two-value logic. Almost all area of sciences and its applications built up on this way. Just last millennium of last century non-classical logic has been put into practice successfully, especially fuzzy logic. The aim of the author is to present the different logics. To have hope, there are possibly other applications of areas of sciences too, not only in computer sciences.

Keywords: interval logic, intuitionistic logic, fuzzy logic, many-value logic

1. BEVEZETÉS

Az ember logikus gondolkodása évezredekre nyúlik vissza, melynek alapja a klasszikus kétértékű logika. Erre épült általában a tudomány majd minden területe és majd minden alkalmazás. Csak az elmúlt évezred utolsó századaiban sikerült matematikailag korrekt módon leírni és alkalmazni nem-klasszikus logikákat. A klasszikus logika diadalútja a görögöktől nevezetesen Arisztotelésztől és Archimedes-től indul, ezért archimedesi vagy arisztotelészi logikának is hívják, s a nyugati kultúra gondolkodásának alapját képezte több ezer éven át. Természetesen a korai időkben is felmerültek a klasszikus logika paradoxonjai, melyeknek korrekt módon való feloldásai sokáig vártak magukra. Példaként álljon a következő állítás: „Ez az állítás hamis.”. A nem-klasszikus logikai gondolkodás pedig kifejezetten a keleti kultúra gondolkodás módjában található meg – főként a vallásokban úgy, mint a kínai taoizmusban, vagy az indiai hinduizmusban, buddhizmusban vagy az amerikai indiánoknál – mind a mai napig [13].

A klasszikus logikát szokás kétértékű logikának is nevezni; ha egy állítás igaz, akkor 1 értéket rendelünk hozzá, ha pedig hamis, akkor nullát. A nem-klasszikus logikák alatt értendő a többértékű logikák, melyek lehetnek diszkrét-, vagy folytonos értéket felvevők. A többértékű logikák tényleges matematikai korrektséggel történő kidolgozás körülbelül 1920-as évek elejétől egészen az 1930-as évekig tehető. Łukasiewicz volt az első, aki a három-értékű logikát leírta az 1920-as évben, majd később Tarski-val együtt tárgyalták a véges többértékű logikai rendszereket, valamint az első végtelen értékű predikátum rendszereket [7,8,9,14]. Post Łukasiewicz-től függetlenül dolgozta ki a rendszerét, melyben n-értékű predikátum függvényeket használ [16]. A következő többértékű logikák az intuicionista logikák, melyeket Brouwer és Heyting hoztak létre azáltal, hogy elvetették a kizárt közép axiómát [2,3]. Heyting három-értékű modellje ezen alapszik [6,10]. Gödel bebizonyította, hogy nincs olyan véges többértékű logika, mely ekvivalens lenne az intuicionista predikátum kalkulussal. 1932-ben pedig létrehozta a végtelen értékű intuicionista rendszerét [4,5]. Az intuicionista logikában az igazságérték inkább a bizonyíthatóság vagy levezethetőség mértékét jelenti sem, mint az igazság értékének a fokát. Lofti Zadeh a fuzzy halmazelmélet és logika koncepcióját vetette meg az 1960-as

években, valamint a későbbiekben a lehetőségi mérték fogalmát is bevezette [18,19]. Belnap pedig [1]-ben vezette be a négyértékű logikáját, mely a bizonytalan ismeretek logikai vizsgálatára használható.

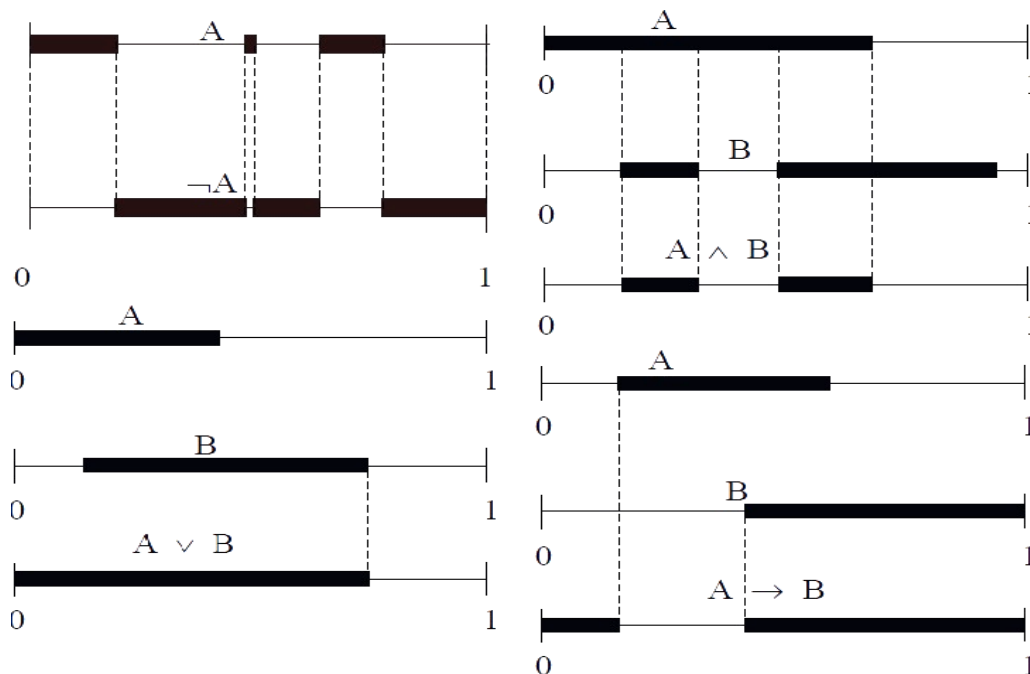
Intervallum értékű logikák bevezetése pedig Nagy Benedek nevéhez fűződik [11,12], ahol egy állítás igazság értéke a nulla egy zárt intervallumban lévő intervallum(ok). Ez egy olyan természetes kiterjesztése a többértékű logikáknak, melyben bevezetve a megfelelő műveleteket (operátorokat) az előzőleg említett többértékű logikák tárgyalhatóak. Kivéve a Zadeh féle fuzzy logikát, mely általánosabb, mint az intervallumértékű logikák. Megjegyzendő, hogy a többértékű logikákat szokás fuzzy logikáknak mondani a logikások között, de a mérnöki gyakorlatban a fuzzy logikán mindig a Zadeh félét értjük. A mérnöki gyakorlatban használt Zadeh-féle fuzzy halmazelméletre és logikára találhatunk példát Pokorádi [15] művében. Vojtas [17]-ben pedig összehasonlítást végez többek között gödéli intuicionista-, a szorzat- és a Łukasiewicz típusú logikák között.

A tanulmány bemutatja a különféle logikákat a teljesség igénye nélkül, a szerző szubjektív válogatása alapján. Remélve ezzel azt, hogy esetleg más műszaki tudományterületeken is alkalmazásra találjanak, nemcsak a számítástechnikában.

A cikk a következő fejezetekből áll. A második fejezet bemutatja az intervallum-értékű logikát, a harmadik fejezet reprezentálja a Belnap logikát, a negyedik fejezet leírja a BIT logikát, míg az ötödik fejezet a Post logikát fejtegeti. A hatodik fejezet betekintést enged a gödéli logikába, míg a hetedik fejezet pedig a Łukasiewicz típusú logikákba nyújt bevezetést. A szorzat logika pedig a nyolcadik fejezetben kerül elemzésre, a kilencedik fejezetben pedig az összefoglalása történik a tanulmánynak.

2. AZ INTERVALLUM-ÉRTÉKŰ LOGIKA

Az intervallum értékű logika kidolgozása Nagy Benedek nevéhez fűződik [11,12]. Az intervallum értékű logika igazság értéke a $[0,1]$ intervallumon lévő rész intervallumok és/vagy pontok halmaza. Ha az A és B intervallum értékű állítások (prepozíciók) a $[0;1]$ intervallumból, akkor a velük való alapvető logikai műveletek definíciója táblázatos formában a 1. Táblázatban történik.



1. ábra Az intervallum-értékű logika alapoperátorai (forrás: [12])

A továbbiakban a matematikai formalizmust elhagyva, s inkább a szemléletességet szem előtt tartva; a 1. Ábra segítségével bemutatom az alapoperátorok működését. Az implikáció műveletét ugyan úgy értelmezzük, mint a klasszikus esetben, azaz $A \rightarrow B \equiv \neg A \sqcup B$.

Név	Negáció	Konjunkció	Diszjunkció	Implikáció
Jele	$\neg A$	$A \square B$	$A \sqcup B$	$A \rightarrow B$
Érték	$A^c = [0;1] \setminus A$	$A \cap B$	$A \cup B$	$A^c \cup B, (A \setminus B)^c$
Halmazelmélet	A komplementere	Metszet	Unió	Különbség komplementere

1. Táblázat Az intervallum-értékű logika alapoperátorai (forrás: [12])

A további vizsgálatok során kiderült, hogy bevezetve néhány újabb operátort ez a logikai rendszer alkalmassá vált a többértékű logikák ábrázolására, kezelésére, melynek részletes leírása Nagy [12] munkájában megtalálható, továbbá az ehhez a rendszerhez tartozó nem logikai operátorok pontos matematikai definíciója is. A következő részfejezetek egy részében olyan logikák lesznek bemutatva, melyek véges értékűek és nincsen végtelen értékű variációjuk.

3. BELNAP LOGIKA

Ez a logika négyértékű nevezetesen: igaz (T), ismeretlen (U), ellentmondásos (\pm) és hamis (F) értékekkel [1, 12]. Jelenleg a valószínűsíthetően ellentmondásos ismeretanyagok reprezentálására alkalmazzák, valamint egyéb alkalmazási területe az ismeretek frissítése és átvizsgálása, továbbá rendszerszinten pedig a logikai programok tanulási folyamataiban alkalmazzák. A Belnap logika igazságtáblája megtekinthető az 2. Táblázatban. Az 2. Ábrán pedig a Belnap logika intervallum reprezentációja látható.



2. Ábra Belnap logika intervallum reprezentációja (forrás: [12])

$A \square B$	T	U	\pm	F	$A \square B$	T	U	\pm	F	A	$\neg A$
T	T	U	\pm	F	T	T	T	T	T	T	F
U	U	U	F	F	U	T	U	T	U	U	U
\pm	\pm	F	\pm	F	\pm	T	T	\pm	\pm	\pm	\pm
F	F	F	F	F	F	T	U	\pm	F	F	T

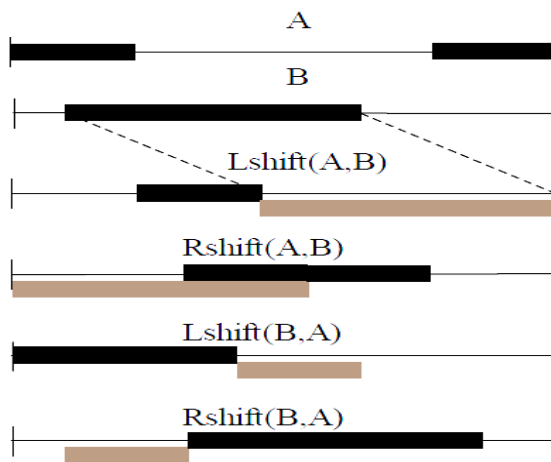
2. Táblázat Belnap logika igazság táblája (forrás: [1,12])

Ahhoz, hogy műveleteket lehessen végezni az intervallum-értékű interpretációján a Belnap logikának, szükség van az [12] bevezetett operátorokra.

4. BIT LOGIKA

Ez a logika a számítástudományban a legszélesebb körben elterjedt és használt logika, de ez nem az úgy nevezett tradicionális értelemben vett logika, hanem az, amely szerint a számítógépeink dolgoznak, azaz értékeli ki a logikai formulákat, nyilván ez nem lesz a klasszikus értelemben vett logikai levezetés [12]. Ezen logika szerint a bit az információ egysége. Napjainkra a számítógépek felfejlődtek egészen a 256 bites egység byte-tal rendelkező architektúrává. Megjegyzendő, hogy ez a rendszer az eltolás operátorokkal és a logikai operátorokkal együtt véve funkcionálisan teljes, magyarul bármilyen művelet kiszámítható az eltolás operátorok és logikai operátorok segítségével. A BIT logika vizsgálatával kiderül, hogy az intervallum-értékű logikán bevezetett eltolás operátorokkal funkcionálisan teljessé tehető. A BIT logikában használt eltolás operátor mintájára, az intervallum-értékű logikában is definiáltunk két eltoló operátort; nevezetesen a balra tolás operátort (Lshift), ahol az intervallumok minden határát csökkentjük a paraméter értéke által az első argumentumban. A

jobbra tolás operátora (Rshift) a paraméter első komponensének a hosszával, ez az eltolás körkörös szemben a balra tolás operátorával példaként álljon a következő szemléletes 3. ábra.



3. ábra Az eltoló operátorok szemléletes használata (forrás [12])

5. POST LOGIKA

Normalizált Post logikán olyan logikát értünk [10, 16], amely a $\{0,1, \dots, 1/n\}$ kimeneti értékeket vehet fel, s a következő módon értelmezett operátorokkal rendelkezik:

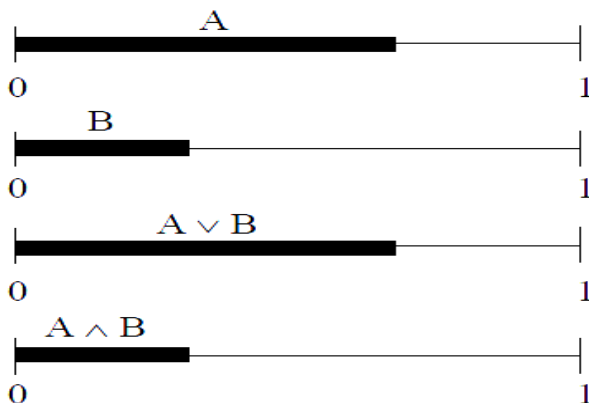
$$\neg A = \begin{cases} 1, & \text{ha } A = 0 \\ A - \frac{1}{n}, & \text{különben} \end{cases}$$

$$A \wedge B = \min(A, B)$$

(1)

$$A \vee B = \max(A, B)$$

A fenti negáció definíciójából jól látszik, hogy ez a negáció ciklikus értékeket vesz fel, ezért ezt a negációt Post, vagy ciklikus negációnak is nevezik. Post meg mutatta, hogy ez a rendszer is funkcionálisan teljes. Egyik érdekes tulajdonsága e rendszernek, hogy a De Morgan azonosságok nem állnak fenn, ez következik a negáció definíciójából. A 4. Ábrán látható az és, vagy operátorok működése.



4. ábra Post logika és, vagy operátorai intervallumokon (forrás: [12])

6. GÖDELI LOGIKA

A gödeli rendszerből hiányzik a harmadik kizárásának elve. Az első próbálkozások az intuicionista logika létrehozására Brouwer és Heyting nevéhez fűződik [2, 3, 6], ők egy háromértékű logikát hoztak létre. Gödel azonban egy általánosabb logikai rendszert kreált, melyben négy alapvető műveletet definiált:

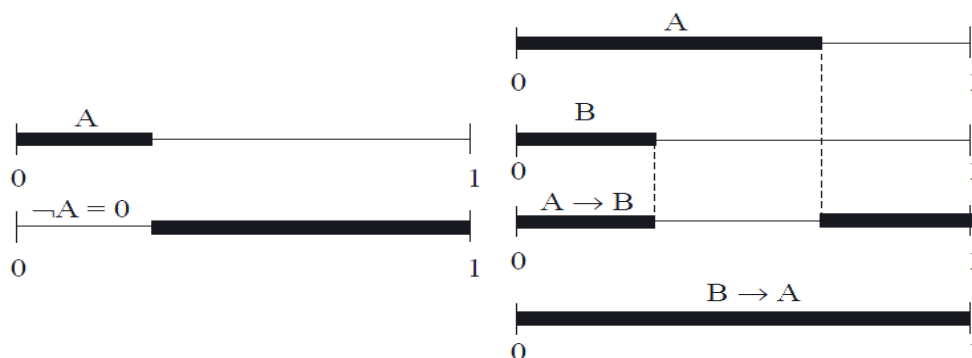
$$\neg A = \begin{cases} 1 & , \text{ ha } A = 0 \\ 0 & , \text{ különben} \end{cases}$$

$$A \wedge B = \min(A, B)$$

$$A \vee B = \max(A, B)$$

$$A \rightarrow B = \begin{cases} 1 & , \text{ ha } A \leq B \\ B & , \text{ különben} \end{cases} \quad (2)$$

Jól látszik, amennyiben csak három logikai értéket engedünk meg, nevezetesen, a 0, 1 és $\frac{1}{2}$ értéket, akkor visszakapjuk a Heyting féle logikát. Tulajdonképpen Gödel és Dummett kidolgozták mind a véges mind a végtelen gödeli rendszer axiomatikus felépítését [4,5]. Érdemes továbbá még megjegyezni, hogy egy állítás kétszeres tagadása az intuicionista rendszerben nem adja vissza az állítást. Ellenben a lánc törvény, nevezetesen az $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$ teljesül. Az 5. Ábrán szemléltettként a gödeli tagadás és következtetés látható.



5. ábra A gödeli negáció és implikáció (forrás: [12])

7. ŁUKASIEWICZ TÍPUSÚ LOGIKÁK

Történetileg Łukasiewicz először a háromértékű logikát, majd a négyértékűt, azt követően pedig adott véges n -értékűt, végül pedig a folytonos értékű logikát definiálta [7, 8, 9, 12, 14].

Az a háromértékű logika, melyet először definiált (3) szerint az funkcionálisan nem teljes, de Slupecki bizonyította, ha a konstans $\frac{1}{2}$ -ed megengedjük harmadik értéknek, akkor viszont funkcionálisan teljessé válik a rendszer.

$$\neg A = 1 - A$$

$$A \rightarrow B = \min(1, 1 - A + B)$$

$$A \vee B = (A \rightarrow B) \rightarrow B = \max(A, B)$$

$$A \wedge B = \neg(\neg A \vee \neg B) = \min(A, B)$$
(3)

Łukasiewicz négyértékű logikáját a 3. Táblázattal lett megadva, melyből a további és vagy kapcsolatok könnyen tovább számolhatóak.

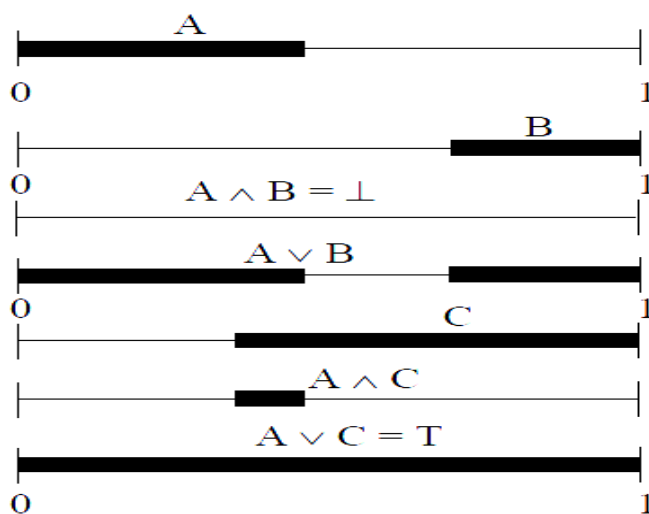
A	$\neg A$	$A \rightarrow B$	0	1/3	2/3	1
0	1	0	1	1	1	1
1/3	2/3	1/3	2/3	1	2/3	1
2/3	1/3	2/3	1/3	1/3	1	1
1	0	1	0	1/3	2/3	1

3. Táblázat Łukasiewicz négyértékű logikája (forrás: [12])

Manapság a Łukasiewicz típusú logikát szokás a következő képen is definiálni:

$$\begin{aligned}
 \neg A &= 1 - A \\
 A \rightarrow B &= \begin{cases} 1 & , \text{ ha } B \geq A \\ 1 - A + B & , \text{ ha } A \geq B \end{cases} \\
 A \vee B &= \max(A, B) \\
 A \wedge B &= \min(A, B) \\
 A \& B &= \max(A + B - 1, 0) \\
 A + B &= \min(A + B, 1)
 \end{aligned} \tag{4}$$

A Łukasiewicz logikákban a kizárt közép és az ellentmondás mentesség axiómája nem teljesül, de az $A + \neg A$ és $\neg(A \& \neg A)$ tautológiák, azaz olyan predikátumok (állítások), amelyek mindig teljesen igazak a változó bármely értékére.



6. ábra Łukasiewicz típusú logikák számításai intervallumokon (forrás: [12])

Érdeemes észrevenni, hogy mind a gödeli, mind a Łukasiewiczzi logika az intervallum-értékű logika speciális esetei.

8. SZORZAT LOGIKA

Az egyik széleskörűen használt és elterjedt fuzzy rendszer a szorzat logika. A számolás szabályai pedig a következők:

$$\begin{aligned} \neg A &= 1 - A \\ A \rightarrow B &= \begin{cases} 1, & \text{ha } A \leq B \\ \frac{B}{A}, & \text{különben} \end{cases} \\ A \bullet B &= A \cdot B \\ A \vee B &= A + B - A \cdot B \end{aligned} \quad (5)$$

Értekes észrevétel, hogy az $A \wedge (A \rightarrow B)$ predikátumnak B értéke van minden A -ra és B -re B , de ez nem jelenti az, hogy a formula igaz klasszikus értelemben viszont ez vonatkozik az előző fuzzy logikákra is. Továbbá szokás ezt a logikát valószínűségi logikának is hívni, ugyanis, ha két független intervallumot tekintek –nincs közös metszetük, akkor $P(A \text{ és } B) = P(A) \cdot P(B)$ -ből következik, hogy

$$P(A \vee B) = 1 - P(\neg A \wedge \neg B) = 1 - P(\neg A)P(\neg B) = 1 - (1 - A)(1 - B) = A + B - AB. \quad (6)$$

Az is megállapítható még, ha A értéke 1 azaz teljesen igaz, akkor B értéke a maximális valószínűség lesz.

Vojtas [17] művében a gödeli intuicionista-, a szorzat-, valamint a Łukasiewicz logikákat, mint optimista realisztikus és pesszimista gondolkodásként jellemezte, melyet a 4. Táblázat mutat.

Gödeli intuicionista logika	Szorzat logika	Łukasiewicz típusú logikák
Optimista, derűlátó	Realista	Pesszimista
Maximális profit	Mérsékelt eredmény	Minimális veszteség
Együttműködés	Tolerancia	Verseny, vetélkedés
Kijelentő, állító	Független	Ellentmondásos
Két szakértő	Két laikus	Szakértő kontra laikus
Barátok	Mindkettő önző	Ellenségek

4. Táblázat Logikák összehasonlítása (forrás: [12])

9. ÖSSZEFOGLALÁS

A szerző célja e tanulmánnyal, hogy felkeltse az érdeklődést a különféle logikák alkalmazására műszaki tudományok területén. Tekintetbe véve, hogy a világunk csak ritkán és igen speciális esetekben működik a klasszikus logika szerint, ennek folyományaként érdemes és kell a többértékű logikákat a való világ problémáira használni, nem csak a mérnöki gyakorlatban, hanem más tudományterületeken is. A szerző távolabbi jövőbeni célja e tanulmánnyal, hogy a műszaki gyakorlatból találjon példát a nem klasszikus logikák alkalmazására.

10. FELHASZNÁLT IRODALOM

- [1] **BELNAP, N. D.**, A useful four-valued logic. In: Modern Uses of Multiple-valued Logic, (editors: J. M. Dunn-G. Epstein) Reidel, 9-37, 1975.
- [2] **BROUWER, L. E. J.**, Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, B. 33, 1925.
- [3] **BROUWER, L. E. J.**, Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, Journal für die reine und angewandte Mathematik, B. 154, H. 1. 1923.
- [4] **DUMMET, M.**, A propositional calculus with denumerable matrix, J. Symbolic Logic 24, 97-106, 1959.
- [5] **GÖDEL, K.**, Zum intuitionistischen Aussagenkalkül. Anzeiger Akademie der Wissenschaften im Wien, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse, 69, 65-66. 1932.
- [6] **HEYTING, A.**, Intuitionism. Amsterdam, 1956.
- [7] **ŁUKASIEWICZ J. – TARSKI A.**, Untersuchungen über den Aussagenkalkül, Sprawozdania z posiedzeń, Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III, XXIII, 30-50., Warszawa, 1930.
- [8] **ŁUKASIEWICZ, J.**, Aristotele's Syllogistic, Dublin, 1954.
- [9] **ŁUKASIEWICZ, J.**, Die logischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Krakow, 1913.
- [10] **MCKINSEY, J. C. C.**, Proof of the Independence of the Primitive Symbols of Heyting's Calculus of Propositions, Journal of Symbolic Logic, IV, 155-158, 1939.
- [11] **NAGY, B.**, Intervallum logika, tézis 1997, 1998.
- [12] **NAGY, B.**, Interval-valued logic as generalization of many valued logics, Tech. Rep., Inst. Math. & Inf., Univ. Debrecen, 2002/20.
- [13] **ÖFFENBERGER, J.**, A többértékű logika előtörténete az antikvitásban (Somos Róbert fordítása, original: Zur Vorgeschichte der Mehrwertigen Logik in der Antike), JPTE Egyetemi Kiadó, Pécs, 1994.
- [14] **PATZIG, G.**, Aristotele, Łukasiewicz and the origins of many-valued logic. in: Logic, Methodology and Philosophy of Science IV (P. Suppes et al. eds.), PWN/North-Holland Publ. Company, Warsaw/Amsterdam, 921-929, 1973.
- [15] **POKORÁDI L.**, Rendszerek és folyamatok modellezése. Debrecen: Campus Kiadó, 2008. 242 p. (ISBN:978-963-9822-06-1)
- [16] **POST, E. L.**, Introduction to a General Theory of Elementary propositions, American Journal of Mathematics, 43, 163-185, N 3, 1921.
- [17] **VOJTAS, P.**, Propositional Abduction with Uncertainty, Preprint 14/1997, P J Safárik University
- [18] **ZADEH, L. A.**, Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility, Fuzzy sets and systems 1, 3-28, 1978.
- [19] **ZADEH, L. A.**, Fuzzy Sets, Inform.control. 8, 338-353, 1965.